

Aufgaben zur Boole'schen Algebra

Aufgabe 1 Erfüllbarkeit und Tautologie

KAP
01

Welche der folgenden Formeln sind (un-)erfüllbar? Ist eine der Formeln eine Tautologie (gültig)?

1. $p \vee p \wedge q$
2. $\neg(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
3. $\neg(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
4. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

Aufgabe 2 Äquivalenz Boole'scher Funktionen (1)

KAP
01

Zeigen Sie, dass die Boole'schen Funktionen

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$$

und

$$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$$

äquivalent sind.

1. per Wahrheitstabelle.
2. mithilfe der grundlegenden Äquivalenzen aus Tabelle 1.3!

Aufgabe 3 Beweis der Konsensusregel

KAP
01

Der Beweis der Konsensusregel (Definition 1.7) verwendet das Shannon'sche Expansionstheorem (Fallunterscheidung).

Beweisen Sie die Konsensusregel

$$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge z)$$

ausschließlich mithilfe der grundlegenden Äquivalenzen aus Tabelle 1.3!

Aufgabe 4 Äquivalenz Bool'scher Funktionen (2)

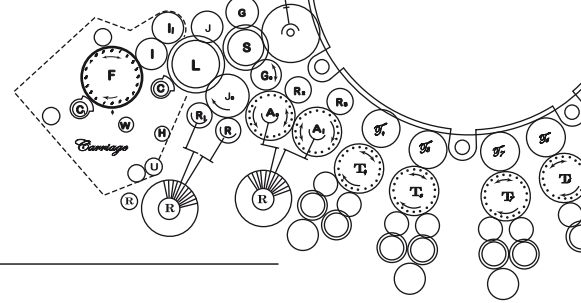
KAP
01

Zeigen Sie, dass

$$(s \wedge a) \vee (\neg s \wedge b) \equiv (s \vee b) \wedge (\neg s \vee a).$$

hält.

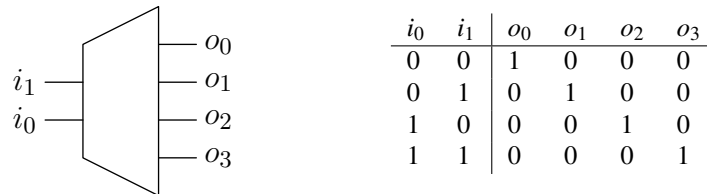
- a) per Wahrheitstabelle.
- b) algebraisch, unter Angabe der verwendeten Regeln.



Aufgabe 5 Äquivalenz-Operation mit 2-zu-4-Decoder

KAP
01

Ein 2-zu-4-Decoder wandelt eine 2-Bit-Binärzahl in eine 4-Bit-Zahl in „One Hot“-Darstellung (siehe Funktionstabelle):



1. Zeigen Sie, dass man die Äquivalenz-Operation mithilfe mehrerer 2-zu-4-Decodern implementieren kann!
2. Beweisen Sie mithilfe grundlegender logischer Äquivalenzen (siehe Tabelle 1.3), dass Ihre Lösung korrekt ist!

Aufgabe 6 NOR als Basis

KAP
01

Zeigen Sie, dass die NOR-Operation $\neg(a \vee b)$ eine Basis ist!

Aufgabe 7 Die Exklusiv-Oder-Operation ist keine Basis

KAP
01

Zeigen Sie, dass die Exklusiv-Oder-Operation keine Basis ist!

Die Definition von \oplus ist wie folgt (siehe auch Aufgabe 1.11 im Buch):

$$a \oplus b \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$$

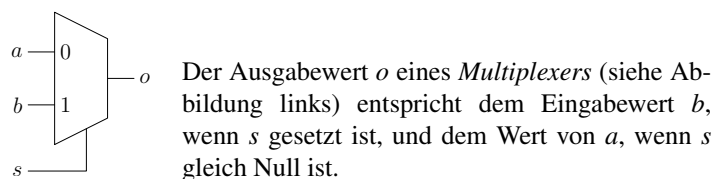
Aufgabe 8 Multiplexer als Basis

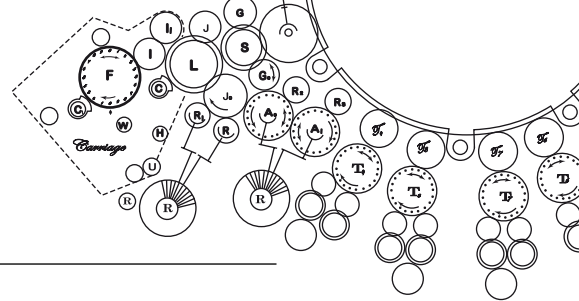
KAP
01

Untenstehend finden Sie die Wahrheitstabelle der Boole'schen \leq -Funktion.

a	b	$a \leq b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1. Implementieren Sie diese Funktion mithilfe von nur einem Multiplexer und Konstanten.





2. Zeigen Sie (in Wort oder Bild), dass der Multiplexer eine Basis darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort!

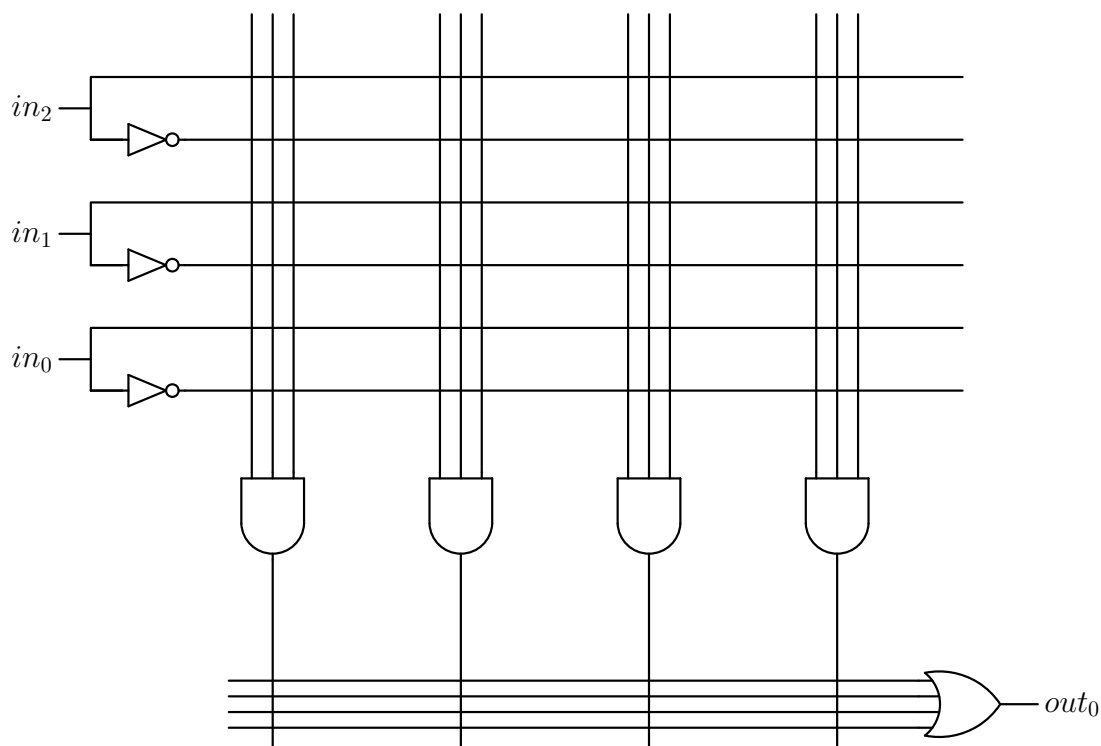
Aufgabe 9 Programmable Logic Array (PLA)

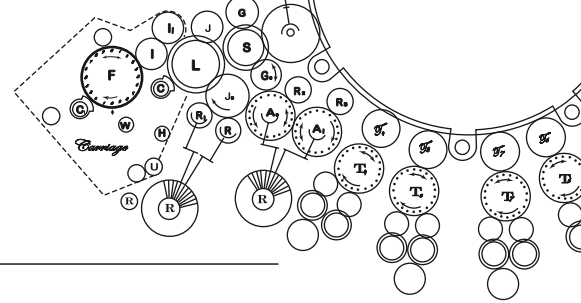
KAP
01

Die *Paritäts-Operation* $out_0 = in_0 \oplus in_1 \oplus in_2$ liefert für drei Eingangswerte in_0 , in_1 und in_2 den Wert 1 wenn eine ungerade Anzahl der Eingänge auf 1 gesetzt ist, und ansonsten 0.

Implementieren Sie diese Funktion mithilfe eines *Programmable Logic Arrays* (PLA) (siehe Aufgabe 1.14 im Buch)!

1. Ermitteln Sie die disjunktive Normalform der Paritäts-Operation.
2. Verwenden Sie ein Karnaugh-Diagramm, um zu zeigen, dass man mindestens vier *Minterme* (Definition 1.8) benötigt, um diese Funktion als PLA zu implementieren!
3. Tragen Sie Ihre Lösung in folgende Abbildung ein:

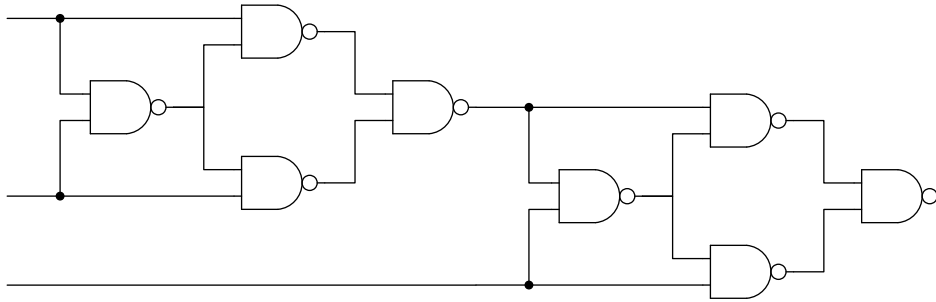




Aufgabe 10 Schaltungsanalyse

KAP
01

Welche Funktion implementiert folgende Schaltung:



Aufgabe 11 Shannon-Expansion

KAP
01

Zeigen Sie mithilfe des Shannon'schen Expansionstheorems, dass

$$(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) .$$

Aufgabe 12 Umformung und Vereinfachung Boole'scher Formeln

KAP
4

Vereinfachen Sie folgenden Bool'schen Ausdruck und geben Sie bei jedem Schritt die verwendeten Regeln an:

$$g = (a \wedge b) \wedge (\overline{b \vee c} \oplus c)$$