Aufgaben zu Rekursiv Aufgebauten Schaltungen

Aufgabe 1 Kostenberechnung für Multiplizierer

KAP **04**

Im Buch (Kapitel 4.6) haben Sie eine Schaltung kennengelernt die die Multiplikation nach dem Schulalgorithmus durchführt. Analog dazu kann man die Multiplikation von $2n$-bit Zahlen auf n-bit Multiplikationen zurückführen. Im Dezimalsystem kann beispielsweise das Produkt der Zahlen 18 und 25 wie folgt berechnet werden:

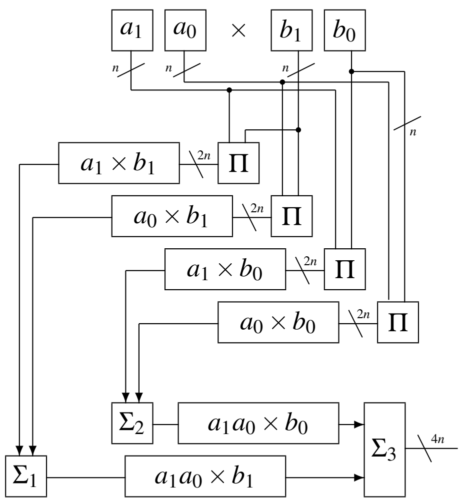
$$
\begin{array}{cccccc}
 & 1 & 8 & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & 3 & 6 & & & \\
 & & 9 & 0 & & \\
\hline
0 & 4 & 5 & 0 & &
\end{array}
$$

Hierbei wird erst 18 mit 2 multipliziert, das Ergebnis (36) mit 10 multipliziert (d.h. nach links „verschoben") und zu 18×5 addiert. Analog dazu kann man auch bei der Multiplikation von $2n$-bit Zahlen verfahren (wenn eine Schaltung zur Multiplikation von n-bit Zahlen bereits vorhanden ist):

$$\overbrace{\boxed{a_1}}^{\text{n bits}}\overbrace{\boxed{a_0}}^{\text{n bits}} \times \overbrace{\boxed{b_1}}^{\text{n bits}}\overbrace{\boxed{b_0}}^{\text{n bits}} = \left[\left(\boxed{a_1}\,\boxed{a_0} \times \boxed{b_1}\right) \cdot 2^n\right] + \left(\boxed{a_1}\,\boxed{a_0} \times \boxed{b_0}\right)$$

Die Multiplikation mit 2^n entspricht hier lediglich dem Verschieben des Ergebnisses um n bits nach links (analog zur Multiplikation mit 10 im oben angeführten Beispiel mit Dezimalzahlen). Für die Multiplikationen $\boxed{a_1}\,\boxed{a_0} \times \boxed{b_1}$ und $\boxed{a_1}\,\boxed{a_0} \times \boxed{b_0}$ geht man ähnlich vor.

Aus dieser Vorgehensweise lässt sich nun leicht ein rekursiver Aufbau ableiten. Basierend auf dem 1-bit Multiplikator $\Pi(1)$, der sich mit Hilfe eines einzigen Und-Bausteins implementieren lässt, konstruiert man die Schaltungen für $\Pi(2)$, $\Pi(4)$, $\Pi(4)$, … nach folgendem Schema:



Nehmen Sie an dass die Bauteile $\boxed{\Sigma_1}$, $\boxed{\Sigma_2}$ und $\boxed{\Sigma_3}$ mit Hilfe von Volladdierern gebaut sind, die jeweils aus 2 Und, 2 Oder und 2 Exklusive-Oder Bauteilen bestehen. Das Verschieben (bzw. Multiplizieren mit 2^n) der Operanden geschieht durch entsprechende Verdrahtung.

1. Geben Sie (in Abhängigkeit von n) an, aus wievielen Bauteilen die Bauelemente $\boxed{\Sigma_1}$, $\boxed{\Sigma_2}$ und $\boxed{\Sigma_3}$ bestehen. Es soll möglichst sparsam mit Bauteilen umgegangen werden.

2. Sollten Sie die vorherige Aufgabe nicht gelöst haben, so nehmen Sie an dass die Addierer insgesamt $c_s \cdot n$ Bauteile benötigen. Sei $C(n)$ die Anzahl der elementaren Bauteile (Und, Oder, Exklusive-Oder) in $\Pi(n)$.

   Schreiben Sie die Formeln fr folgende Kosten hin:

   $C(1) = 1$

   $C(2) =$

   $C(4) =$

3. Leiten Sie nun eine rekursive Formel für $C(n)$ unter Verwendung von $C(n/2)$ her:

   $C(n) =$

4. Vergleichen Sie die Kosten dieser Schaltung mit den Kosten des in der Vorlesung vorgestellten einfachen Multiplizierers (mit $n-1$ serielle Addierern). Begründen Sie einen etwaigen Unterschied der Kosten und erläutern Sie kurz die Auswirkungen auf die Laufzeit (bzw. Verzögerung). Es genügt, wenn Sie eine Abschätzung der Kosten in der $O(n)$-Notation angeben.

5. Die geschlossene Form (d.h. die „Lösung” der Rekurrenz) für $C(n)$ lautet:

   $$C(n) = n^2 + c_s \cdot \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} 2^i \cdot n$$

   Beweisen Sie die Korrektheit dieser Lösung mittels Induktion!

KAP
04

Aufgabe 2 Rekursiv Aufgebauter Multiplexer

Basierend auf 2:1 Multiplexern können 4:1 und 8:1 Multiplexer wie in Abbildung 1 *rekursiv* aufgebaut werden:

Im Allgemeinen kann man also einen $2^n : 1$ Multiplexer nach diesem Schema aus $2:1$ Multiplexern zusammensetzen.

Man benötigt *einen* Inverter, *zwei* Und-Gatter und *ein* Oder-Gatter um einen 2:1 Multiplexer zu bauen.

1. Geben Sie an, aus wievielen Bauteilen der 4:1 Multiplexer und der 8:1 Multiplexer bestehen (getrennt nach Typen der Bauteile, d.h. geben Sie an wie viele Inverter, And-Gatter und Or-Gatter benötigt werden).

   4:1 Multiplexer ________________ Inverter, ________________ AND, ________________ OR
   8:1 Multiplexer ________________ Inverter, ________________ AND, ________________ OR

2. Sei $C(n)$ die Anzahl der elementaren Bauteile (Und, Oder, Inverter) eines $n:1$ Multiplexers. $C_I(n)$ bezeichnet die Anzahl der Inverter dieses $n:1$ Multiplexers, $C_A(n)$ die Anzahl der And-Gatter und $C_O(n)$ die Anzahl der Or-Gatter.

   Geben Sie folgende *Kosten* an:

   $C_I(16) =$ ____________, $C_A(16)=$ ____________, $C_O(16) =$ ____________, $C(16)=$ ____________
   $C_I(32) =$ ____________, $C_A(32)=$ ____________, $C_O(32) =$ ____________, $C(32)=$ ____________
   $C_I(64) =$ ____________, $C_A(64)=$ ____________, $C_O(64) =$ ____________, $C(64)=$ ____________

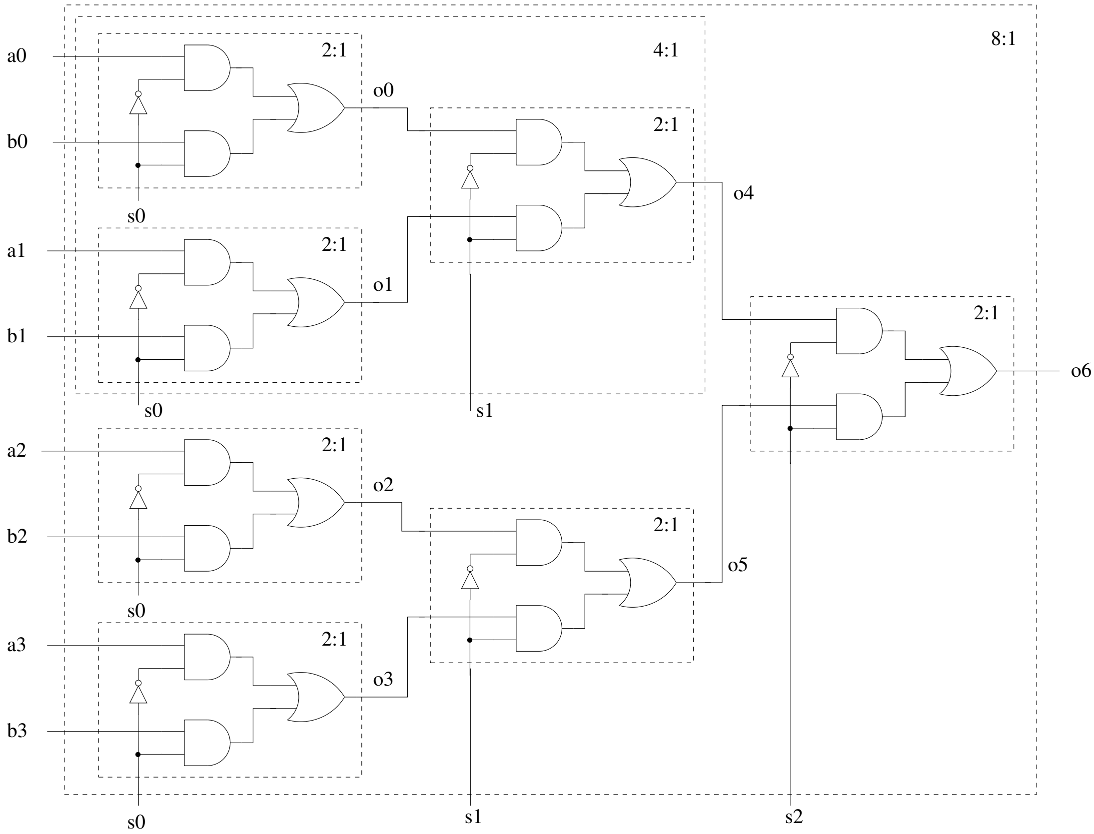


Abbildung 1: Rekursiver Aufbau von Multiplexern

3. Geben Sie nun die rekursive Formel fr $C(n)$ unter Verwendung von $C(\frac{n}{2})$ an:

   $C(n) =$ ____

4. Gegeben sei folgende rekurrente Gleichung:

$$C(n) = C(n/2) + n - 2$$

   mit $C(1) = 0$.

   Beweisen Sie mittels Induktion, dass

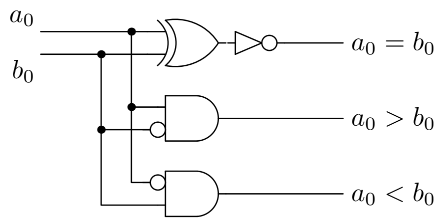
$$C(n) = \sum_{i=0}^{\log_2(n)-1} \left(\frac{n}{2^i} - 2\right)$$

   die korrekte geschlossene Form für diese Rekurrenz ist!

KAP **04**

Aufgabe 3 Rekursiver Komparator

a) Konstruieren Sie, basierend auf dem unten abgebildeten 1-Bit-Komparator, einen rekursiv aufgebauten Komparator für *vorzeichenlose* n-Bit-Binärzahlen!



b) Wie müssen Sie diese Schaltung erweitern, damit sie auch für vorzeichenbehaftete Binärzahlen in Zweier-Komplement-Darstellung das richtige Ergebnis liefert?